

ПРИКЛАДНА ТЕОРІЯ ІГОР

КОНСПЕКТ

навчальної дисципліни

підготовки докторів філософії

зі спеціальності 281 Публічне управління та адміністрування

(шифр і назва спеціальності)

Частина 1.

Вступ

Тема 1. Основні поняття теорії ігор

Тема 2. Матричні ігри

Практичні завдання.

Укладач: Полякова О.Ю.

Харків, 2020 р.

Что наша жизнь?
Игра!

Введение

Математическая теория игр предназначена для моделирования конфликтных ситуаций, т.е. ситуаций, в которых имеется несколько лиц, принимающих решение и каждый из них руководствуется своим собственным критерием качества решения. При этом результат каждого зависит от того, какое решение примут все участники.

Примеры игровых ситуаций.

Игра "Чет-нечет". Двое одновременно выкидывают на пальцах какое-либо число. Если сумма выкинутых чисел четна, то выигрывает первый, если нечетна – второй. Каждый из игроков обладает двумя стратегиями: выкинуть четное число или нечетное. Результат розыгрыша для пары можно представить в виде следующей матрицы. Единица означает выигрыш, а -1 – проигрыш.

Таблица 1

Матрица выигрышей

Стратегии	Чет	Нечет
Чет	(1, -1)	(-1, 1)
Нечет	(-1, 1)	(1, -1)

Игра "Семейный спор". Муж и жена решают, куда пойти в воскресный вечер. Муж настаивает на походе на футбольный матч, а жена – в театр. При этом, если они идут куда-либо вместе, то каждый получает большее удовольствие от зрелища, чем, если бы они пошли порознь. Удовольствие, которое получит семья оценивается каждым по 10-бальной шкале и представлено в следующей таблице:

Таблица 2

Оценочная матрица для игры "семейный спор"

	Муж	Футбол	Театр
Жена			
Футбол		(4, 6)	(1, 1)
Театр		(1, 1)	(8, 2)

В этой игре существует две устойчивые стратегии (Ф, Ф) и (Т, Т).

Игра "Дилемма заключенного". Шериф города Нью-Портсмут схватил двух грабителей банков, но награбленного при них не оказалось. Все, что осталось от последнего ограбления было ими предусмотрительно спрятано в потайном месте. Чтобы вернуть хотя бы часть похищенного, шериф предложил каждому из грабителей сделку: в обмен на информацию о месте, где спрятаны деньги, он поможет им на суде получить меньшее наказание, чем

его напарнику. Если никто из них не выдаст информацию, то оба они получают по 10 лет каторжных работ. Тот, кто выдаст информацию, получит как соучастник 2 года, при условии, что его напарник промолчит и получит 15 лет. Если же оба они выдадут информацию (и она окажется правдивой), то оба получают по 5 лет.

В этой игре, как и в предыдущей, существует две ситуации равновесия: (выдать, выдать) и (не выдать, не выдать). Но каждый будет стремиться изменить свою стратегию.

Еще одна разновидность этой игры "дуэль с зеркалом".

Игры "убегания". Это разновидность непрерывных игр, которые описываются дифференциальными уравнениями. Пусть заяц находится на расстоянии A от своей норы на некотором расстоянии от него и под углом к прямой, соединяющей зайца и нору, находится голодный волк. Дело происходит на ровной местности, волк видит зайца и начинает за ним гнаться со скоростью v_1 . Одновременно заяц, испугавшись, бежит к норе со скоростью v_2 . Волк бежит так, чтобы его скорость все время была направлена на зайца (стратегия оптимального прицеливания), а заяц бежит по прямой. Догонит ли волк зайца, прежде, чем тот успеет спрятаться в нору?

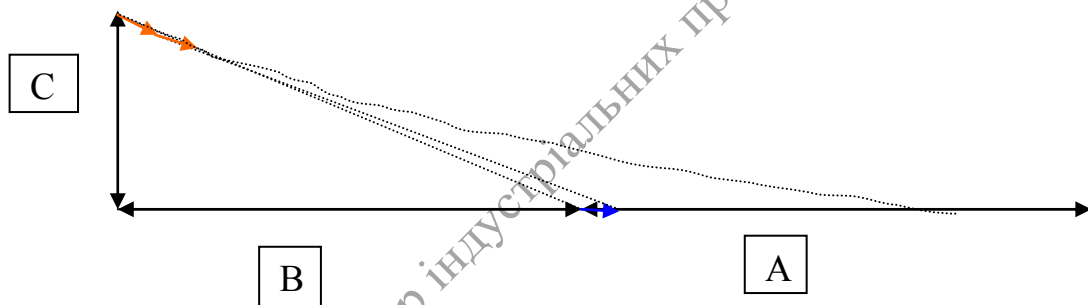


Рис. 1. Схема движения волка и зайца в игре "убегания".

Игра с природой. В игре существует единственный настоящий игрок, который максимизирует свой критерий, зависящий от его выбора и факторов, не выбираемых им и отражающих объективные явления. Обычно интересы природы считаются неизвестными и несущественными, а в худшем случае антагонистическими интересам игрока. Более обоснованным является моделирование поведения природы с помощью критерия безразличия, например, если под природой понимается выполнение каких-либо физических законов.

Военные игры (обобщенная задача Гросса). Типичным примером "военной" антагонистической игры является игра "нападение – защита", где стратегии каждого игрока ограничены наличными у него ресурсами, а выигрыш зависит от того какой вес придают стороны тому или иному объекту. Однако совершенно необязательно, чтобы стороны придавали один и тот же вес данному объекту. Более типичным представляется различие во взглядах. Таким образом, интересы противников не обязательно противоположны.

Конкуренция на рынке. Пусть у потребителей имеется некоторое общее количество денег, которое они могут потратить на приобретение товара у двух производителей – C . Установлен также максимально возможный объем продукции у конкурентов K и максимальные цены b . Конкуренты определяют объемы производства продукции x, y и цены – p, q . Себестоимость продукции предполагается одинаковой для обоих конкурентов – a . Тогда выигрыш каждого из конкурентов выглядит следующим образом:

$$w_1 = \begin{cases} (p - a)x, & \text{при } p < q, \\ \min[C - qy, px] - ax & \text{при } p \geq q, \end{cases}$$

$$w_2 = \begin{cases} (q - a)y, & \text{при } q < p, \\ \min[C - px, qy] - ay & \text{при } q \geq p. \end{cases}$$

при условиях

$$0 \leq x \leq K, 0 \leq y \leq K, 0 \leq p \leq b, 0 \leq q \leq b, px \leq C, qy \leq C.$$

Эта игра не является антагонистической, т.к. при $y=0$ изменение w_1 за счет вариации x, p не изменит выигрыш второго игрока.

Игры типа "соревнование". Пусть экономический потенциал двух стран выражается функциями, зависящими от способа использования ресурсов и времени (момента) использования. Тогда интересы соревнующихся сторон являются монотонно возрастающими функциями разницы между потенциалами. Если моменты времени одинаковы, то интересы игроков противоположны. Если же они перестают быть таковыми, то игра приобретает неантагонистический характер.

Иерархические системы. Пусть имеется центр, управляющий деятельностью нескольких производителей. Примем, что производители не зависят друг от друга, а только от центра и выбирают технологическую и ассортиментную политику. Центр выбирает управляющие факторы: выделение ресурсов, установление цен на продукцию, штрафы и поощрения). В достаточном соответствии с реальностью можно считать, что центр сам ничего не производит, но интересуется неким совокупным результатом производства. а производители интересуются только своим результатом. Существенным свойством модели иерархии является то, что критерий центра не зависит от собственной стратегии. Кроме того, первый ход делает центр, что дополняется возможностью следить за действиями производителей.

Игровые модели можно также использовать при решении задач векторной оптимизации, тогда игра происходит между критериями.

Тема 1. Основные понятия теории игр

1. Представление игры

Игра - совокупность совместных действий конечного числа заинтересованных лиц - **игроков**, которые подвержены определенным правилам – правилам игры, и в результате которых каждый из игроков получает некоторый **выигрыш**.

Позиционное представление игры получается в результате моделирования многошаговых игр, когда игроки делают ходы по очереди. Такое представление наиболее наглядно в виде дерева. Листья этого дерева представляют конец игры и на них также отражен выигрыш каждого игрока. Игровая ситуация соответствует выбору вершины. Все игроки выбирают таким образом путь на графе, который ведет их к листьям.

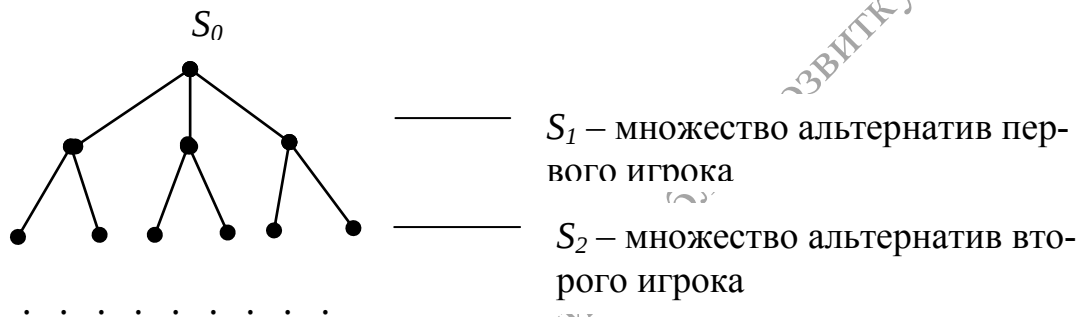


Рис. 2. Позиционное представление игры.

Такая игра называется детерминированной позиционной игрой с **полной информацией**, каждый из игроков знает, где он находится. В отличие от таких игр, в играх с неполной информацией вводится для каждого игрока его информационное множество. Игрок выбирает ход, исходя из того, что он находится в своем информационном множестве.

Общее описание игры целесообразно давать в двух вариантах: **объективное описание** (или **нормальное представление**) и **субъективное описание**. Объективное описание зачастую неточно известно игрокам. Субъективное описание соответствует той информации об интересах и возможностях игроков, которая есть у того или иного игрока. Если этот игрок является оперирующей стороной, в интересах которой проводится исследование игры, то считается, что исследователь знает об игре не больше, чем оперирующая сторона. Эта субъективная информация соответствует позиции при исследовании вопроса и принятии решений оперирующей стороной.

Нормальное представление игры k игроков содержит множества допустимых стратегий каждого игрока, функции цены выигрыша каждого игрока и ограничения на ходы игрока. При этом функция цены (выигрыш) i -го игрока $V_i(x_1, \dots, x_k)$, зависит от ходов всех игроков.

Общее понятие стратегии – это правило поведения игрока, т.е. выбора

хода в зависимости от той информации, которую он получит.

Рассмотренные игры носят название **игры в чистых стратегиях**.

Рандомизированной игрой называется такая игра, в которой каждый игрок задает не конкретную альтернативу (вершину на дереве игры), а вероятность выбора той или иной альтернативы. Ход игрока получается в результате розыгрыша случайной величины. Такие игры называются **играми в смешанных стратегиях**.

Модель игры в смешанных стратегиях может быть сведена к модели в чистых стратегиях, а именно, задав на некотором шаге распределение вероятностей выбора трех альтернатив $(1, 0, 0)$, получаем чистую первую стратегию.

Теперь дадим более конкретное понятие стратегии.

Стратегией i -го игрока для детерминированной позиционной игры (игры в чистых стратегиях) называется функция, которая позволяет, исходя из известного позиционного множества, вычислить вершину. В рандомизированной игре эта функция позволяет определить распределение вероятностей, выигрышем в таком случае будет математическое ожидание выигрыша реализации.

2. Классификация игровых ситуаций

Пусть задано нормальное представление игры k игроков.

Игра называется **коалиционной**, если правилами игры игрокам разрешено объединяться в группы (коалиции). В противном случае игра называется **бескоалиционной**.

Если объединение игроков заложено в правилах игры, т.е. должно происходить обязательно, то такая игра называется **кооперативной**.

Если сумма всех выигрышей всех игроков равна нулю то такая игра является **игрой с нулевой суммой**.

Среди всего множества игр выделяются игры двух лиц – $G(T_1, T_2, K_1, K_2)$, где T_1, T_2 – множества возможных стратегий игроков, K_1, K_2 – выигрыши игроков.

Если в каждом из множеств T_1, T_2 конечное число элементов, то игра носит название **биматричной**, т.е. игры определяемой двумя матрицами выигрышей.

Биматричная игра с нулевой суммой, т.е. $K_1 + K_2 = 0$, называется **антагонистической или матричной**. Эту игру можно определить одной матрицей (скажем выигрышей первого игрока), при этом выигрыш одного возможен только за счет проигрыша другого.

В матричной игре предполагается, что первый игрок выбирает номер строки, а второй – номер столбца.

Выигрыши игроков носят еще название **ядра игры**.

3. Принципы рационального выбора стратегий

В простейшем случае полной независимости игроков понятие *рационального выбора стратегии* полностью описывается стремлением i -го игрока к оптимизации своего выигрыша (или критерия). Таким образом, решение задачи сводится к решению нескольких задач оптимизации. Аналогично обстоит дело и в случае совпадающих интересов, когда разумные игроки должны стремиться к совместной оптимизации единого критерия эффективности. В остальных случаях нет единого понятия рационального выбора стратегий оперирующей стороной.

Общие принципы формирования рационального выбора основаны, конечно, на стремлении уменьшить неопределенность в получаемых результатах.

1. Уменьшение неопределенности с помощью введения новых критериев эффективности: уменьшить число игроков или существенных переменных, а также свести дело к случаю, в котором уже имеется приемлемый принцип выбора. При этом наблюдаются две основные тенденции, которые могут присутствовать и совместно.

- *Изоляционизм* – замена i -м игроком только своего критерия так, чтобы уменьшить количество переменных x_j , влияющих на его выигрыш, который уже и будет оптимизироваться независимо от того, что делают остальные игроки.
- *Коллективизм* – введение единого общего критерия (общей цели) для группы игроков. В этом случае говорят о создании коалиции или компромиссе между игроками.

Реально могут присутствовать обе тенденции в виде коалиции части игроков или частичной коалиции, заключающейся во введении общих ограничений и заставляющими ограничиваться некоторыми неулучшаемыми значениями (*вектора Парето*).

2. Стремление к надлежащей взаимной информированности. В стремлении к информированности можно выделить те же два направления: добровольный обмен информацией и самостоятельное ее добывание (даже вопреки желаниям других игроков). Этот принцип не противоречит первому, а дополняет его.

3. Стремление к устойчивости. Понятие устойчивости не является достаточно четким. Здесь возможны несколько вариантов. *Принцип гарантированного результата* – призывающий игрока при недостаточной информированности базироваться на рассмотрении наихудших возможных игровых ситуаций с учетом имеющейся информации о поведении других игроков.

Весьма популярным принципом рациональных действий, обеспечивающих устойчивость, является принцип равновесия, использующий ситуации равновесия (если они существуют). Ситуации равновесия характеризуются тем, что отклонение от них одного игрока не может принести ему пользы.

Тема 2. Матричні ігри

1. Принцип гарантированного результата

Гарантированным результатом i -го игрока, обладающего критерием $K_i(x_1, \dots, x_n)$, называется величина

$$r_i^G = \max_{x_i \in T_i} \min_{\substack{x_j \in T_j \\ j \neq i}} K_i(x_1, \dots, x_n).$$

Для случая двух игроков, если задано нормальное представление игры $G(T_1, T_2, K_1(x_1, x_2), K_2(x_1, x_2))$ имеем

$$r_1^G = \max_{x_1 \in T_1} \min_{x_2 \in T_2} K_1(x_1, x_2);$$

$$r_2^G = \max_{x_2 \in T_2} \min_{x_1 \in T_1} K_2(x_1, x_2).$$

В частности для антагонистической игры, для которой выполнено соотношение $K_1(x_1, x_2) = -K_2(x_1, x_2)$, имеем соотношение гарантированных результатов

$$r_1^G = \max_{x_1 \in T_1} \min_{x_2 \in T_2} K_1(x_1, x_2);$$

$$r_2^G = \max_{x_2 \in T_2} \min_{x_1 \in T_1} K_2(x_1, x_2) = - \min_{x_2 \in T_2} \max_{x_1 \in T_1} K_2(x_1, x_2).$$

Гарантированный результат первого игрока в матричной игре будем называть *гарантированным выигрышем*, а гарантированный результат второго игрока – *гарантированным проигрышем*. Смысл гарантированного проигрыша – это то, больше чего второй игрок не может проиграть. В дальнейшем для антагонистических игр будем рассматривать платежную матрицу (матрицу выигрышей) первого игрока.

Свойства гарантированного результата.

?

1. Гарантированный результат является величиной аддитивной.

Пусть имеется две игры (для двух лиц): $G(T_1, T_2, K_1, K_2)$, $G'(T_1, T_2, K'_1, K'_2)$, причем ядра этих игр отличаются на постоянную величину $K'_1 = K_1 + a$, $K'_2 = K_2 + b$, тогда гарантированные результаты игроков отличаются на те же самые величины.

Определение. Пусть заданы две игры G, G' . G' называется *редукцией* игры G , если выполнено одно из условий:

1. $T_1 = T'_1$ и существует такая функция g , переводящая множество $T_2 \rightarrow T'_2$, причем $K_i(x_1, x_2) = K'_i(x_1, x_2)$.
2. $T_2 = T'_2$ и существует такая функция f , переводящая множество $T_1 \rightarrow T'_1$, причем $K_i(x_1, x_2) = K'_i(f(x_1), x_2)$.

Определение. Игры G, G' **эквивалентны**, если существует конечная последовательность редукций, переводящая одну в другую.

?

2. Для эквивалентных игр гарантированные результаты совпадают.

3. Теорема о верхней и нижней цене игры для матричных игр.

Гарантированный выигрыш первого игрока не превосходит гарантированного проигрыша второго

$$\max_{x_1 \in T_1} \min_{x_2 \in T_2} K(x_1, x_2) \leq \min_{x_2 \in T_2} \max_{x_1 \in T_1} K(x_1, x_2).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию выигрыша $K(x_1, x_2)$, единую для игроков. Очевидно, что

$$\min_{T_2} K(x_1, x_2) \leq K(x_1, x_2).$$

В предположении, что $\max$ и $\min$ существуют, получаем

$$\min_{T_2} K(x_1, x_2) \leq \max_{T_1} K(x_1, x_2). \rightarrow$$

$$\max_{T_1} \min_{T_2} K(x_1, x_2) \leq \max_{T_1} K(x_1, x_2) \rightarrow$$

$$\max_{T_1} \min_{T_2} K(x_1, x_2) \leq \min_{T_2} \max_{T_1} K(x_1, x_2).$$

■

2. Ситуации равновесия

Рассмотрим игру n лиц $G(T_1, \dots, T_n, K_1, \dots, K_n)$.

Определение. Набор стратегий $(X_1, \dots, X_n)$ называется **ситуацией равновесия**, если выполнено неравенство

$$\forall i K_i(X_1, \dots, X_{i-1}, x_i, X_{i+1}, \dots, X_n) \leq K_i(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_n),$$

таким образом, ни одному из игроков не выгодно в одиночку отступить от ситуации равновесия.

Ситуации равновесия в антагонистических играх (X, Y) называются **седловыми точками**. В таком случае имеет место неравенство

$$K(x, Y) \leq K(X, Y) \leq K(X, y).$$

Замечание. Если все игроки одновременно отступят от ситуации равновесия, то они могут увеличить свой выигрыш.

Решить игру значит найти ее ситуацию равновесия, если она существует.

Не всякая игра имеет решение – ситуацию равновесия. Например, игра чет-нечет не имеет седловой точки. Гарантированный выигрыш первого игрока равен -1 , а гарантированный проигрыш второго 1 , они не совпадают.

Теорема.

Если существует седловая точка игры, то гарантированные результаты совпадают.

Доказательство.

В соответствии с определением седловой точки имеем соотношение

$$K(x, Y) \leq K(X, Y) \leq K(X, y),$$

следовательно,

$$\max_{T_1} \min_{T_2} K(x, Y) \leq K(X, Y) \leq \min_{T_2} \max_{T_1} K(X, y).$$

С другой стороны, очевидно выполнение следующей последовательности неравенств

$$\max_{T_1} K(x, Y) \leq K(X, Y) \leq \min_{T_2} K(X, y)$$

⇓

$$\min_{T_2} \max_{T_1} K(x, Y) \leq K(X, Y) \leq \max_{T_1} \min_{T_2} K(X, y)$$

Сопоставляя с предыдущим неравенством получаем требуемый результат.

Общее значение совпадает со значением функции цены выигрыша в седловой точке. и носит название цены игры.



Гарантированный результат можно рассматривать и для игр в смешанных стратегиях. В таком случае он представляет собой максимин математического ожидания результата

$$r_1^G = \max_P \min_Q M[P, Q] = \max_P \min_Q P^T A Q,$$

где $A_{m \times n}$ – матрица выигрышей в чистых стратегиях, $P_{1 \times m}$, $Q_{n \times 1}$ – множества возможных распределений вероятностей по стратегиям.

Гарантированный результат игр в смешанных стратегиях обладает теми же свойствами, что и для игр в чистых стратегиях.

В случае непрерывных множеств стратегий, вводится мера множества, отражающая распределение вероятностей по множеству. Функция цены в таком случае есть двойной интеграл по обоим множествам, а гарантированный результат мат. ожидание случайной величины выигрыша.

Замечания.

1. Применение максиминных решений никак не противоречит применению смешанных стратегий оперирующей стороной. При этом переход к осредненному критерию есть личное дело оперирующей стороны. Относительно остальных игроков необходима только уверенность, что никто из них не узнает конкретной реализации случайного выбора.
2. Любая коалиция, исходящая из принципа максимина, не будет отдавать побочные платежи участникам вне коалиции.

Теорема Фон-Неймана.

|| Всякая матричная игра в смешанных стратегиях имеет цену игры.

Доказательство опирается на терему об альтернативе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Для любой матрицы } A_{m \times n} \text{ выполнено одно из двух условий} \\ 1) 0 \in \text{co}\{A_1, \dots, A_n, e_1, \dots, e_m\} \subset \mathbb{R}^m \\ 2) \exists x \geq 0: A^T x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{array} \right.$$

Доказательство. Рассмотрим первую альтернативу и получим требуемый результат в условиях первой альтернативы. В матричном виде она имеет вид

$$As + u = 0. \quad (1)$$

Заметим, что s отлично от нуля, $s, u \geq 0$ и в силу свойств выпуклой оболочки выполнено

$$\sum_{i=1}^n s_i + \sum_{i=1}^m u_i = 1. \quad (2)$$

Преобразуем равенство (1)

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^n s_j} As = - \frac{u}{\sum_{j=1}^n s_j}$$

и выберем в качестве смешанной стратегии второго игрока

$$\bar{Q} = \frac{s}{\sum_{j=1}^n s_j} \in \mathfrak{R}^n$$

Очевидно, что Q действительно является смешанной стратегией, т.к. выполнены соотношения

$$\bar{Q}_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \bar{Q}_i = 1.$$

Заметим также, что поскольку $u \geq 0$, то $AQ \leq 0$. Умножим последнее неравенство на произвольную смешанную стратегию первого игрока P^T и получим

$$P^T A Q \leq 0, \forall P.$$

Оценим верхний и нижний результаты выигрыша второго игрока.

$$\max_P P^T A \bar{Q} \leq 0 \Rightarrow$$

$$r_2^{\Gamma} = \min_Q \max_P P^T A \bar{Q} \leq 0.$$

Учитывая, что $r_1^{\Gamma} \leq r_2^{\Gamma}$, получаем

$$r_1^{\Gamma} \leq r_2^{\Gamma} \leq 0. \quad (3)$$

Предположим теперь, что мы находимся в условиях второй альтернативы, т.е. $\exists x \geq 0, \sum x_i = 1, x^T A > 0$.

В этом случае рассмотрим стратегию $P = x$ (из теоремы об альтернативе). Очевидно, что P является допустимой стратегией. Кроме того имеет место следующее векторное равенство

$$P^T A > 0.$$

Умножим последнее неравенство на произвольную смешанную стратегию Q второго игрока и получим

$$P^T A Q > 0. \quad (4)$$

Вычислим и оценим гарантированный результат, исходя из (4).

$$\begin{aligned} \min_Q P^T A Q > 0 \Rightarrow \\ r_1^{\Gamma} = \max_P \min_Q P^T A Q > 0 \Rightarrow r_1^{\Gamma} > 0. \end{aligned}$$

В соответствии со свойствами гарантированных результатов имеем

$$r_2^{\Gamma} \geq r_1^{\Gamma} > 0. \quad (5)$$

Используя аддитивность гарантированного результата, получим противоречие.

Рассмотрим новую игру с матрицей выигрышей

$$\begin{aligned} B_{ij} = A_{ij} - k, \quad k = \frac{r_1^{\Gamma} + r_2^{\Gamma}}{2}, \\ r_1^{\Gamma} < r_2^{\Gamma}, \quad k = \text{Const}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для гарантированных результатов игры с матрицей выигрышей B выполнены следующие соотношения:

$$r_1^{\Gamma}(B) = r_1^{\Gamma}(A) - k = r_1^{\Gamma} - \frac{r_1^{\Gamma} + r_2^{\Gamma}}{2} = \frac{1}{2}(r_1^{\Gamma} - r_2^{\Gamma}) < 0. \quad (7)$$

$$r_2^{\Gamma}(B) = r_2^{\Gamma}(A) - k = r_2^{\Gamma} - \frac{r_1^{\Gamma} + r_2^{\Gamma}}{2} = \frac{1}{2}(r_2^{\Gamma} - r_1^{\Gamma}) \geq 0. \quad (8)$$

Если предположить, что $r_1^{\Gamma} < r_2^{\Gamma}$, то должны быть одновременно выполнены и (7), и (8). Но (7) невозможно в условиях первой альтернативы в силу (3), а (8) – в условиях второй альтернативы в силу (6). ■

3. Абсолютно оптимальные стратегии и стратегии наказания

Стратегия x_1^a называется **абсолютно оптимальной (абсолютно доминирующей)**, если для любых возможных $x_2, \dots, x_n, \beta$ выполнено

$$f_1(x_1^a, x_2, \dots, x_n, \beta) = \max_{x_1 \in T_1} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta).$$

Стратегия $x_1^{\varepsilon a}$ называется **ε -абсолютно оптимальной**, если выполнено

$$f_1(x_1^{\varepsilon a}, x_2, \dots, x_n, \beta) > \sup_{x_1 \in T_1} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta) - \varepsilon.$$

В тех случаях, когда такие стратегии существуют, они могут считаться идеалом изоляционизма. Очевидно, что они являются рациональными и, более того, оптимальными в случае, когда оперирующая сторона никак не

может влиять на игровую ситуацию, то есть на стратегии остальных игроков. Например, если оперирующая сторона делает последний ход в игре. Важным свойством есть то, что применение абсолютно оптимальной стратегии не требует знания интересов других игроков, таким образом, x^a устойчива относительно интересов других игроков. Эта стратегия также дает оптимальное решение в случае, если интересы игроков совпадают и первый игрок имеет возможность сообщить о своем ходе другому.

Абсолютно оптимальные стратегии существуют, например, в случае, когда критерий 1-го игрока "аддитивный", то есть имеет вид

$$w_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1, \dots, x_n, \beta)$$

при всех возможных x_1 . В частности, это выполнено для линейных критериев. В общем случае, такой стратегии как правило не существует. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 4. (О существовании абсолютно оптимальных стратегий)

1) Абсолютно оптимальная стратегия x_1^a существует тогда и только тогда, когда

$$\max_{x_1 \in T_1} \inf_{\substack{y_1 \in T_1^0 \\ x_i \in T_i^0, i \neq 1 \\ \beta}} [f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta) - f_1(y_1, x_2, \dots, x_n, \beta)] = 0, \quad (9)$$

где T_i – множество всех стратегий i -го игрока, T_i^0 – множество стратегий, отражающее ожидаемую информацию.

2) Стратегия x_1^* является абсолютно оптимальной тогда и только тогда, когда она реализует максимум выражения (9).

3) ε -абсолютно оптимальная стратегия существует тогда и только тогда, когда выполнено

$$\sup_{x_1 \in T_1} \inf_{\substack{y_1 \in T_1^0 \\ x_i \in T_i^0, i \neq 1 \\ \beta}} [f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta) - f_1(y_1, x_2, \dots, x_n, \beta)] \geq 0, \quad (10)$$

4) Стратегия $x_1^{\varepsilon a}$ является ε -абсолютно оптимальной тогда и только тогда, когда выполнено

$$\inf_{\substack{y_1 \in T_1^0 \\ x_i \in T_i^0, i \neq 1 \\ \beta}} [f_1(x_1^{\varepsilon a}, x_2, \dots, x_n, \beta) - f_1(y_1, x_2, \dots, x_n, \beta)] > -\varepsilon,$$

С помощью теоремы 4 поиск абсолютно оптимальных и ε -абсолютно оптимальных стратегий сводится к реализации $\sup \inf$, что в свою очередь может быть сведено к задаче оптимизации. При этом стремление к увеличению этого максимина и есть стремление к реализации абсолютно оптимальной стратегии.

Однако абсолютно оптимальные стратегии не могут быть признаны достаточно рациональными. Например, пусть в матричной игре типа "ди-

леммы заключенного", в которой первый игрок выбирает строку, а второй – столбец, матрица выигрышей имеет вид

(5,5)	(0,10)
(10,0)	(1,1)

Для каждого из игроков вторая стратегия является абсолютно оптимальной. Однако соответствующий результат (1,1) не очень желателен, поскольку (5,5), очевидно, лучше. Для реализации этого результата необходимо коллективное решение. Если в матрице отражен проигрыш игроков, то абсолютно оптимальным проигрышем является (5, 5), хотя этого можно избежать, если каждый выберет вторую стратегию.

Аналогично обстоит дело в иерархических системах.

Под *стратегией наказания* i -м игроком j -го будем понимать абсолютно оптимальную стратегию i -го игрока, если бы его критерием эффективности был $w_i = -w_j$, то есть если бы его интересы были противоположны интересам j -го игрока. Аналогично можно рассматривать *стратегии поощрения* i -м игроком j -го. Для этого достаточно рассмотреть абсолютно оптимальную стратегию i -го игрока относительно критерия w_j .

Разница результатов, даваемых стратегиями наибольшего поощрения и наказания,

$$\Delta_{i1} = \max_{x_1} f_1(x_1, \dots, x_n, \beta) - \min_{x_1} f_1(x_1, \dots, x_n, \beta)$$

характеризует возможное влияние первого игрока на результат i -го при заданных остальных стратегиях. Если первый игрок не может оказать влияния ни на кого из игроков, то абсолютно оптимальная стратегия (если она есть) становится наиболее рациональным индивидуальным способом действий. Улучшения результатов при этом можно ожидать только за счет коллективных действий.

Решение матричных игр может быть проведено несколькими способами в зависимости от характеристик и размерности игры. Далее будут рассмотрены методы нахождения седловых точек и цены игры в чистых и смешанных стратегиях, а также частные случаи игр с малым числом стратегий.

4. Доминирование стратегий

С ростом размерности матричной игры возрастает сложность ее анализа и решения. Поэтому такие задачи решаются сведением к играм меньшей размерности (редукции игры). Одна из возможностей проведения редукции основана на понятии доминирования стратегий.

В матричной игре G_A стратегия x' первого игрока *доминирует* его стратегию x'' ($x' \succ x''$), если для любой чистой стратегии j второго игрока выполнено

$$x'A_j \geq x''A_j, \quad (11)$$

где A_j – вектор-столбец матрицы выигрышей A .

Аналогично стратегия y' второго игрока **доминирует** стратегию y'' , если для любой чистой стратегии i первого игрока выполнено

$$A_i y'^T \leq A_i y''^T, \quad (12)$$

где A_i - вектор-строка матрицы выигрышей A .

В частности, чистая стратегия i' первого игрока **доминирует** его чистую стратегию i'' , если для любой чистой стратегии j второго игрока

$$a_{ij} \geq a_{i''j}. \quad (13)$$

Понятие доминирования связано с оптимальностью стратегий следующими теоремами.

Теорема 5.

Если в игре G_A стратегия одного из игроков (первого) x' доминирует его стратегию x'' , и стратегия x'' оптимальна, то стратегия x' также оптимальна.

Доказательство.

В силу определения доминирования (11) имеем

$$x'' A_j \leq x' A_j, \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

Следовательно,

$$\min_j x'' A_j \leq \min_j x' A_j. \quad (14)$$

Так как x'' оптимальная стратегия, то выполнено

$$\min_j x'' A_j = V_A,$$

поэтому в силу (14) стратегия x' также оптимальна.

Следствие. Первый игрок может не использовать своих доминируемых стратегий.

Теорема 6. (О спектре оптимальной стратегии)

Если чистая стратегия i_0 первого игрока доминируется его чистой или смешанной стратегией x , отличной от i_0 , то существует оптимальная стратегия x_0 этого игрока, в которую стратегия i_0 входит с нулевой вероятностью.

Следующее следствие из этой теоремы носит конструктивный характер и позволяет установить структуру оптимальных стратегий первого игрока.

Следствие. Пусть i_0 – чистая стратегия первого игрока в игре матрицы выигрышей A , которая доминируется некоторой его стратегией x , отличной от i_0 , Φ - матрица, полученная из A вычеркиванием i_0 -ой строки, и $\hat{x}$ – оптимальная стратегия в игре с матрицей Φ . Тогда стратегия x , полученная из $\hat{x}$ вставкой на i_0 -е место нуля, является оптимальной в исходной игре. Кроме того, имеет место соотношение

$$V_A = V_{\hat{A}}.$$

Доказательство следствия

Из теоремы 6 следует, что в игре G_A у первого игрока существует оптимальная стратегия x_0 , в которую чистая стратегия i_0 не входит. Для нее выполнено следующее равенство

$$\min_j x_0 A_j = V_A. \quad (15)$$

Эту стратегию можно также рассматривать как смешанную стратегию первого игрока в игре G_Φ . Следовательно, для нее должно быть выполнено

$$\min_j x_0 \hat{A}_j = V_{\hat{A}}. \quad (16)$$

Из соотношений (15)-(16) следует $V_A \leq V_{\Phi}$. Однако в соответствии со свойствами редукции игры должно иметь место

$$V_A \geq V_{\Phi}$$

Следовательно, возможно только выполнение равенства $V_A = V_{\Phi}$.

Из последнего полученного равенства следует также и оптимальность стратегии x в игре G_A .

Более точные результаты для оптимальных стратегий основаны на понятии строго доминирования.

В матричной игре G_A стратегия x' первого игрока **строго доминирует** его стратегию x'' (а стратегия x'' строго доминируется стратегией x'), если

$$\forall j \quad x' A_j > x'' A_j. \quad (17)$$

Аналогично переносятся понятия строго доминирования чистых стратегий.

Практическое применение понятия строго доминирования и соотношение оптимальных и строго доминируемых стратегий устанавливается следующими теоремами.

Теорема 7.

Если в игре G_A стратегия x'' строго доминируется стратегией x' , то она не может быть оптимальной.

Следствие. Игроки не должны применять своих строго доминируемых стратегий.

Теорема 8.

Если чистая стратегия i_0 первого игрока строго доминируется в игре G_A его стратегией x , то для любой оптимальной стратегии $x^ = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ должно быть выполнено*

$$\xi_{i0} = 0.$$

Следствие. Пусть чистая стратегия i первого игрока в игре G_A строго доминируется некоторой его стратегией, Φ – матрица, полученная из A отбрасыванием i -ой строки. Тогда множества оптимальных стратегий в играх G_A и G_Φ совпадают.

Теорема 9.

Если i -ю строку матрицы A доминирует некоторая выпуклая комбинация других строк этой матрицы, то оптимальная стратегия первого игрока в игре G_A может быть получена из оптимальной стратегии первого

игрока в игре G_Φ , где Φ получена вычеркиванием i -ой строки из матрицы A , путем вставки нуля на i -ое место.

Аналогичный результат имеет место и для оптимальных стратегий второго игрока. При этом исключается доминирующий столбец, а в оптимальной стратегии на его месте вставляется нуль.

Рассмотрим пример решения игры с помощью исключения доминируемых стратегий.

Пример.

Найти оптимальные стратегии в игре с матрицей выигрышей

$$A \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

В данной матрице очевидно, что первая строка доминируется третьей, поэтому ее необходимо исключить, а в оптимальной стратегии первого игрока на первом месте будет стоять нуль. В результате получим матрицу

$$A \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Далее заметим, что второй столбец доминирует третий, поэтому его также необходимо исключить, а в оптимальную стратегию второго игрока вторая стратегия будет входить с нулевой вероятностью. Новая матрица имеет вид

$$A \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Далее опять заметим, что первая стратегия второго игрока (первый столбец) доминирует третью (второй столбец в новой матрице), поэтому ее также необходимо исключить. После этого исключения матрица состоит из одного столбца, в котором первая строка (вторая стратегия первого игрока) доминирует вторую (то есть третью стратегию первого игрока), поэтому после исключения в матрице останется единственный элемент. Следовательно, оптимальной стратегией первого игрока является его вторая чистая стратегия, а оптимальной стратегией второго – третья его чистая стратегия. Иначе говоря, оптимальные смешанные стратегии имеют вид

$$x^* = (0; 1; 0)$$

$$y^* = (0; 0; 1)$$

Заметим, что точно такой же результат дает и поиск седловой точки матрицы. Действительно,

$$A \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 1 \\ \rightarrow 0 \end{matrix} \rightarrow 1$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 6 & 5 & 1 \\ & \downarrow & \\ & 1 & \end{matrix}$$

Теоремы 5-9 позволяют с помощью исключения доминируемых стратегий первого игрока и доминирующих стратегий второго игрока привести игру к меньшей размерности и восстановить оптимальные стратегии игроков в исходной игре, вставляя нули на подходящее место. Однако вопрос о решении редуцированной игры в общем виде остается открытым. Следующие результаты позволяют найти смешанные оптимальные стратегии для некоторого, впрочем достаточно широкого, класса игр.

Стратегия игрока называется **вполне смешанной**, если в нее с ненулевой вероятностью входят все чистые стратегии этого игрока.

Ситуация равновесия (седловая точка) называется **вполне смешанной**, если она состоит из вполне смешанных стратегий игроков.

Игра называется **вполне смешанной**, если в ней любая ситуация равновесия является вполне смешанной.

Знание структуры оптимальных стратегий игроков существенно облегчает их нахождение. Для вполне смешанных стратегий имеет место следующая теорема.

Теорема 10.

Пусть в $n \times n$ матричной игре G_A матрица выигрышей A является невырожденной.

Тогда, если второй игрок имеет в игре G_A вполне смешанную оптимальную стратегию, то первый игрок имеет в ней единственную оптимальную стратегию вида

$$x^* = \frac{J_n A^{-1}}{J_n A^{-1} J_n^T}, \quad (18)$$

где J_n – вектор-строка, состоящая из n единиц.

При этом цена игры составит

$$V_A = \frac{1}{J_n A^{-1} J_n^T}. \quad (19)$$

Если же в игре G_A вполне смешанную оптимальную стратегию имеет первый игрок, то второй игрок обладает единственной оптимальной стратегией

$$y^* = \frac{A^{-1} J_n^T}{J_n A^{-1} J_n^T}, \quad (20)$$

и также выполнено равенство (19).

Таким образом, если относительно оптимальных стратегий игроков известно, что они являются вполне смешанными, то с помощью теоремы 10 оптимальные стратегии устанавливаются однозначно.

Замечание. Верно и обратное утверждение. Если в игре G_A оба игрока имеют вполне смешанные оптимальные стратегии, а для одного из них вполне смешанными являются все оптимальные стратегии, то матрица выигрышей A является невырожденной.

Удобный признак полной смешанности игры основан на следующем определении.

В игре G_A имеется **доминирующая диагональ**, если существует $q > 0$, такое, что

$$\begin{aligned} a_{ii} &> q, \\ a_{ij} &\leq q, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

и имеется **сильно доминирующая диагональ**, если кроме того существует смешанная стратегия x_0 первого игрока, для которой выполнено

$$x_0 A > q J_n.$$

Теорема 11.

Игра с сильно доминирующей диагональю является вполне смешанной.

5. Решение матричных игр малой размерности

Приведенные выше теоремы позволяют решить матричную игру сведением к играм меньшей размерности (используя понятие доминирования) или решить игры специального вида. Однако как поступать с играми даже малой размерности в случае, если воспользоваться понятием доминирования не удастся? Этот вопрос можно разделить на два частных случая. Один случай представляет наименьший нетривиальный размер игры 2×2 . Второй случай является некоторым расширением и касается игр, в которых у одного из игроков две чистые стратегии, а у второго – произвольное конечное число.

Рассмотрим простейшую игру, в которой каждый из игроков имеет всего по две чистые стратегии (такова, например, игра "чет-нечет").

Матрица выигрышей для игры 2×2 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Смешанные стратегии игроков в этой игре полностью определяются вероятностью выбора их первой чистой стратегии. Пусть ξ – вероятность выбора первым игроком своей первой чистой стратегии, тогда по определению стратегии вероятность выбора им второй чистой стратегии составит $1 - \xi$, то есть смешанная стратегия первого игрока представляет собой вектор вида $x = (\xi, 1 - \xi)$. Аналогично смешанные стратегии второго игрока являются парами $y = (\eta, 1 - \eta)$, где η – вероятность выбора вторым игроком своей первой чистой стратегии. Все множество возможных ситуаций является единичным квадратом в плоскости координат (ξ, η) , вершины этого квадрата соответствуют выбору чистых стратегий (рис. 3).

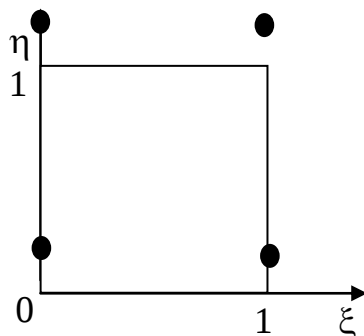


Рис. 3. Множество возможных ситуаций в игре 2×2

Для ситуации (x, y) выигрыш первого игрока определяется соотношением

$$\begin{aligned} K(x, y) &= xAy^T = (\xi, 1-\xi) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ 1-\eta \end{pmatrix} = \\ &= \xi\eta(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + \xi(a_{12} - a_{22}) + \eta(a_{21} - a_{22}) + a_{22}. \end{aligned} \quad (21)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} C &= a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \\ \alpha_1 &= a_{12} - a_{22}, \\ \alpha_2 &= a_{21} - a_{22}. \end{aligned}$$

Из определения седловой точки имеем

$$xAy^{*T} \leq x^*Ay^{*T} \leq x^*Ay^T$$

$\Downarrow$

$$\max_x xAy^{*T} = x^*Ay^{*T} = \min_y x^*Ay^T.$$

Из последнего равенства получаем систему для нахождения оптимальных стратегий

$$\begin{cases} \frac{\partial K(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi^*} = 0 \\ \frac{\partial K(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta^*} = 0. \end{cases}$$

С учетом выражения (21) система преобразуется следующим образом

$$\begin{cases} \eta^*(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + (a_{12} - a_{22}) = 0 \\ \xi^*(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + (a_{21} - a_{22}) = 0. \end{cases}$$

или в новых обозначениях

$$\begin{cases} C\eta^* = \alpha_1 \\ C\xi^* = \alpha_2. \end{cases} \quad (22)$$

Система (22) в зависимости от соотношения входящих в нее параметров может иметь единственное решение или множество решений. Рассмотрим несколько случаев:

а) если $C \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, то система (22) имеет единственное решение

$$\begin{cases} \xi^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \\ \eta^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \end{cases} \quad (23)$$

б) если $C \neq 0$, $\alpha_1 = 0$ или $\alpha_2 = 0$, то очевидно, что либо $\eta = 0$ либо $\xi = 0$;

в) если $C=\alpha_1=0$ или $C=\alpha_2=0$, то решениями являются любые пары вида (ξ, η^*) или (ξ^*, η) , где ξ^*, η^* определяются соотношениями (23), а $\xi, \eta \in (0; 1)$.

Следующие варианты представляют решения, не следующие непосредственно из системы (22), а из условия приемлемости ситуации для первого игрока

$$\begin{aligned} A_1 y^T &\leq x A y^T, \\ A_2 y^T &\leq x A y^T; \end{aligned} \quad (24)$$

г) если $\xi=1$, то первое из этих неравенств обращается в тождественное равенство, следовательно, получаем

$$A_2 y^T \leq A_1 y^T$$

или в новых обозначениях

$$\eta C \geq \alpha_1;$$

таким образом, первого игрока устраивают все пары вида $(1, \eta)$, где $\eta C \geq \alpha_1$;

д) если положить $\xi=0$, то в тождественное равенство обращается второе из неравенств (24), следовательно, должно быть выполнено

$$\begin{aligned} A_1 y^T &\leq A_2 y^T, \\ \eta C &\leq \alpha_1. \end{aligned}$$

Поэтому первого игрока устраивают все ситуации вида $(0, \eta)$, где $\eta C \leq \alpha_1$.

Ситуации равновесия определяются пересечением с множеством ситуаций, удовлетворяющих второго игрока, которые определяются аналогичными соотношениями

$$\begin{aligned} (\xi, 1), \text{ где } \xi C &\leq \alpha_2, \\ (\xi, 0), \text{ где } \xi C &\geq \alpha_2, \\ (\xi^*, \eta), \text{ где } \eta &\in (0; 1). \end{aligned}$$

Таким образом, приемлемые для игроков ситуации образуют одинаково направленные трехзвенные зигзаги, пересечением которых является либо одна точка, либо отрезок ситуаций равновесия.

Пример.

Найдем ситуации равновесия для следующих игр 2×2 .

$$1) \quad A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Для этой игры имеем $C=2-1-0+3=4$, $\alpha_1=3-1=2$, $\alpha_2=3-0=3$, следовательно, имеется единственная вполне смешанная ситуация равновесия $\xi^*=1/2$, $\eta^*=3/4$ или $x^*=(1/2, 1/2)$, $y^*=(3/4, 1/4)$.

$$2) \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

В этой игре $C=1-2+1=0$, следовательно, имеет место вырожденный случай, поэтому ситуация равновесия определяется пересечением множеств

пар $(1; \eta) \cup (\xi; 1) = (1; 1)$. Таким образом, в этой игре также единственная ситуация равновесия, причем в чистых стратегиях, $x^* = (1, 0)$, $y^* = (1, 0)$.

Для некоторых матричных игр можно использовать графо-аналитическими методами, в которых графически определяются особенности множества оптимальных стратегий, а затем, пользуясь знанием этих особенностей, находится полная характеристика решения аналитически.

В основе этих методов лежит соотношение

$$V_A = \max_x \min_j x A_j = \min_y \max_i A_i y^T,$$

где внешние экстремумы достигаются на оптимальных стратегиях.

Рассмотрим игру, в которой первый игрок имеет всего две чистые стратегии, а второй – n чистых стратегий. Матрица выигрышей этой игры имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Множество всех допустимых стратегий первого игрока, как и ранее, определяется вероятностью выбора им первой чистой стратегии, то есть представляет собой отрезок $[0; 1]$. Пусть второй игрок выбирает свою чистую стратегию j . Тогда выигрыш первого будет зависеть от выбранной им смешанной стратегии $x = (\xi, 1 - \xi)$:

$$x A_j = \xi a_{1j} + (1 - \xi) a_{2j}.$$

Последнее равенство представляет собой уравнение прямой в координатной плоскости $(\xi, K(x, y))$. Таким образом, каждой чистой стратегии второго игрока соответствует своя прямая (рис. 4). Графиком функции

$$\min_j x A_j = \min_j \{ \xi a_{1j} + (1 - \xi) a_{2j} \}$$

будет нижняя огибающая всех прямых, соответствующих стратегиям второго игрока (ни рис. 4 это жирная линия). Этот график представляется собой ломаную выпуклостью вверх. Абсцисса наивысшей точки этой ломаной соответствует оптимальной стратегии первого игрока ξ^* . Такая точка может быть не одна, тогда на ломаной есть горизонтальный участок, и множество оптимальных стратегий будет состоять из абсцисс всех точек этого участка.

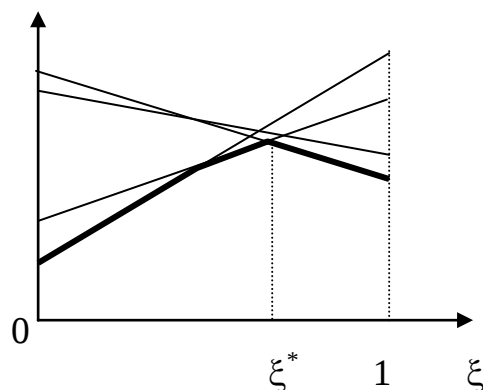


Рис. 4. Решение игр $2 \times n$

С помощью этого построения можно определить и оптимальные стратегии второго игрока. Если на ломаной есть горизонтальный участок, то для соответствующей прямой имеем $a_{1j}=a_{2j}$, поэтому у второго игрока есть единственная чистая оптимальная стратегия j . Если на ломаной есть пик и он приходится на точку с абсциссой 1 или 0, то оптимальная стратегия первого игрока является чистой, а оптимальными стратегиями второго будут те его чистые стратегии, которые подходят к пиковой точке с положительным наклоном и все их комбинации. Если же абсцисса пиковой точки отлична от 0 и 1, то существуют по крайней мере две прямые, пересекающиеся в этой точке, с разным наклоном. Поэтому, если второй игрок откажется от всех остальных своих стратегий, то останется игра 2×2 , решение которой было приведено выше.

Замечание. Аналогичным образом решаются игры, в которых второй игрок имеет только две чистые стратегии, а первый – произвольное конечное число. В этом случае строится верхняя огибающая и определяется аналитически ее нижняя точка.

Наконец, следует заметить, что графоаналитические методы можно также применять для решения матричных игр, в которых у обоих игроков по 3 чистые стратегии, хотя анализ игры в этом случае гораздо сложнее.

6. Матричные игры и задачи линейного программирования

Решение матричной игры может быть сведено к решению стандартной задачи линейного программирования.

Рассмотрим игру в смешанных стратегиях с $m \times n$ матрицей выигрышей A . Можно считать, что все ее элементы положительны (иначе к ним можно прибавить некоторое достаточно большое число, причем новая игра будет эквивалентна исходной).

Пусть X – произвольная смешанная стратегия 1-го игрока.

Обозначим $r_X = \min_j X^T A_j$ и заметим, что из положительности элементов A следует положительность r_X для любой стратегии X . Таким образом, имеем

$$0 < r_X \leq X A_j, \quad j=1, \dots, n. \quad (25)$$

Кроме того, согласно свойствам цены игры, если X оптимальная стратегия, то имеет место равенство

$$r_X = \max_x r_x = V_A. \quad (26)$$

Рассмотрим вектор $\tilde{X} = \frac{1}{r_X} X$. Неравенства (25) дают нам

$$\tilde{X} A_j \geq 1, \quad j = \overline{1, n} \quad (27)$$

Поскольку X является смешанной стратегией, то выполнено

$$\tilde{X} J_m^T = \frac{1}{r_X}, \quad (28)$$

где J_m – вектор, состоящий из m единиц.

а, кроме того, $\tilde{X} \geq 0$.

Из (26) и (28) следует, что стратегия $\tilde{X}$ будет оптимальной тогда и только тогда, когда

$$\tilde{X}J_m^T \rightarrow \min \quad (29)$$

В результате получаем стандартную задачу линейного программирования (ЗЛП). Оптимальное значение ее целевой функции есть величина, обратная цене первоначальной игры, а всякое решение этой ЗЛП после соответствующей нормировки (то есть деления на решение) является оптимальной стратегией первого игрока.

Аналогично, вводя для каждой стратегии Y второго игрока $r_Y = \max A_i Y^T$ и полагая $\tilde{Y} = \frac{1}{r_Y} Y$, мы приходим к задаче линейного программирования

вида

$$\begin{aligned} A_i \tilde{Y}^T &\leq 1, \quad i = \overline{1, m} \\ \tilde{Y} &\geq 0, \\ J_n \tilde{Y}^T &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (30)$$

которая является двойственной к предыдущей. Следовательно, решения двойственной к (27), (29) ЗЛП и только они являются оптимальными стратегиями второго игрока в игре с матрицей A .

Таким образом, решение матричной игры может быть сведено к решению пары двойственных друг к другу ЗЛП.

Верно и обратное. Если пара двойственных задач имеет решения, то их множество полностью описывается множеством решений некоторой матричной игры.

Пусть задана пара двойственных задач линейного программирования

$$XA \leq B, \quad (31)$$

$$X \geq 0, \quad (32)$$

$$XC^T \rightarrow \max \quad (33)$$

и

$$AY^T \geq C^T, \quad (34)$$

$$Y \geq 0, \quad (35)$$

$$BY^T \rightarrow \min, \quad (36)$$

где X, C – m -мерные векторы, Y, B – n -мерные векторы, а A – матрица $m \times n$.

Умножая неравенство (31) справа почленно на неотрицательный вектор Y , мы получим

$$XAY^T \leq BY^T, \quad (37)$$

а умножая неравенство (34) слева почленно на X , –

$$XAY^T \geq XC^T. \quad (38)$$

Из (37) и (38) следует, что

$$XC^T \leq BY^T \quad (39)$$

при любых X, Y , удовлетворяющих неравенствам (31)–(36). Следовательно, если в (39) имеет место равенство, $XC^T = BY^T$, то XC^T принимает наибольшее значение, допускаемое неравенствами (31) и (32), а BY^T – наименьшее значение, допускаемое неравенствами (34) и (35). То есть X и Y оказываются в этом случае оптимальными решениями для рассматриваемых задач линейного программирования (это утверждает и основная теорема двойственности).

На основании пары ЗЛП (31)–(33) и (34)–(36) рассмотрим $(m+n+1) \times (m+n+1)$ -матрицу M , имеющую блочную форму

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -A & C^T \\ A^T & 0 & -B^T \\ -C & B & 0 \end{bmatrix}$$

Эта матрица кососимметричная, поэтому матричная игра с такой матрицей выигрышей будет симметричной. Следовательно, ее значение (цена игры) будет равно нулю, а оба игрока в ней имеют одинаковые оптимальные стратегии.

Пусть $Z = (U, V, t)$ – оптимальная стратегия в игре с матрицей M , причем $U_{m \times 1}$, $V_{n \times 1}$, t – скаляр. Так как Z – стратегия, то выполнено

$$Z \geq 0, \\ ZJ_{m+n+1}^T = 1,$$

а ее оптимальность означает, что

$$MZ \geq V_M = 0.$$

Теорема 12. (О связи разрешимости ЗЛП и матричной игры).

Пусть даны пара двойственных ЗЛП вида (31)–(33) и (34)–(36) и описанная выше соответствующая им матрица M .

Тогда

1) если $Z = (U, V, t)$ – оптимальная стратегия в игре с матрицей M , в которой $t > 0$, то $X = \frac{1}{t}U$, $Y = \frac{1}{t}V$ являются соответственно оптимальными решениями прямой и двойственной задач;

2) если для каждой оптимальной стратегии $Z = (U, V, t)$ оказывается, что $t = 0$, то обе задачи линейного программирования неразрешимы;

3) если X, Y – решения прямой и двойственной задач линейного программирования и

$$t = \frac{1}{XJ_m^T + J_n Y^T + 1},$$

то $(m+n+1)$ -вектор $Z = (tX, tY, t)$ является оптимальной стратегией в игре с матрицей M .

Следствие. Любой метод решения ЗЛП может быть использован для решения матричных игр.

Практичні завдання.

1. Побудова моделі матричної гри

Пример 1. Каждый из двух игроков, не зная выбора другого, положит монетку гербом или решкой вверх. При совпадении сторон обе монетки забирает первый игрок, в противном случае их забирает второй. Построить матрицу игры.

Решение. У каждого из игроков имеется по две чистые стратегии: положить монету гербом или решкой вверх. Обозначим множество чистых стратегий первого игрока S , а второго – R , тогда имеем

$$S = \{Г, Р\}; R = \{Г, Р\}.$$

В такой игре могут возникнуть четыре ситуации:

$$(s_1, r_1) = (Г, Г);$$

$$(s_2, r_1) = (Р, Г);$$

$$(s_1, r_2) = (Г, Р);$$

$$(s_2, r_2) = (Р, Р).$$

Каждой ситуации соответствует выигрыш первого игрока (проигрыш второго). Матрицей игры в таком случае является следующая

$$\begin{array}{c|cc} & r_1 & r_2 \\ \hline s_1 & 1 & -1 \\ s_2 & -1 & 1 \end{array}$$

Задачи.

1. Условия аналогичны примеру 1. Совпадение гербов на выбранной стороне монет дает двойной выигрыш первому игроку, а несовпадение сторон при выборе решки (цифры) первым игроком влечет тройной штраф. Построить матрицу игры.

Ответ.

$$\begin{array}{c|cc} & 2 & -1 \\ \hline -3 & & 1 \end{array}$$

2. Два партнера выбирают независимо друг от друга одно из значений $-1, 0$ или 1 . Обозначим значение, выбранное первым игроком s , а вторым – t . Сумма, которую второй игрок выплачивает первому, равна $s(t-s) + t(t+s)$. Построить матрицу игры.

Ответ.

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & \\ -2 & -1 & 2 & \end{array}$$

3. Два игрока независимо выбирают одно из чисел $1, 2$ или 3 . Если оба выбирают одно и то же число, то первый игрок платит второму сумму в размере выбранного числа. В противном случае первый игрок получает от второго сумму, равную числу, им выбранном. Построить матрицу игры.

Ответ.

	-1	1	1
	2	-2	2
	3	3	-3

4. Каждый из двух игроков может выбрать один из трех предметов: камень, мешок или ножницы. Причем мешок побеждает камень, ножницы – мешок, камень – ножницы. Игрок, выбравший выигрывающий предмет, получает единицу выигрыша. Если игроки выбирают одинаковые предметы, игра заканчивается вничью. Построить матрицу игры.

Ответ.

	К	М	Н
К	0	-1	1
М	1	0	-1
Н	-1	1	0

5. "Двухпальцевая Морра". Каждый из двух игроков показывает другому один или два пальца и одновременно называет число пальцев, которое по его мнению может показать противник. Если один из игроков угадает правильно, он выигрывает сумму, равную числу пальцев, показанных обоими противниками, в противном случае – ничья. Построить матрицу игры.

Ответ.

Стратегия каждого из игроков представляется парой значений $(i; j)$: i – число, загаданное самим игроком; j – число, которое по его мнению загадал другой игрок).

	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
(1,1)	0	2	-3	0
(1,2)	-2	0	0	3
(2,1)	3	0	0	-4
(2,2)	0	-3	4	0

6. Игроки выбирают одно из целых чисел от 1 до k . Если первый игрок выбрал i , а второй j , то первый получает $i-j$ единиц выигрыша, если $i \geq j$, и платит $i+j$ единиц выигрыша, если $i < j$. Построить матрицу игры.

Ответ.

$$A = \|a_{ij}\|,$$

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j, & i \geq j, \\ -(i + j), & i < j. \end{cases}$$

7. Первый игрок называет одно из чисел 1 или 2, а второй одно из чисел 1, 2, 3. При этом каждый из партнеров пытается угадать, какое из чисел

назовет противник. Если оба партнера угадали или ошиблись одновременно, то игра заканчивается вничью; если же один из них угадал, то он получает выигрыш, равный числу, названному противником. Построить матрицу игры.

Ответ.

0	1	-1	0	-1	0
-1	0	0	2	-1	0
-1	0	-1	0	0	3
1	0	0	-2	0	-2
0	-2	2	0	0	-2
0	-2	0	-2	3	0

8. У полководца, обороняющего город, имеется 3 дивизии, а у его противника 2 дивизии. Известно, что город будет сдан только в том случае, если на одной из двух застав наступающие дивизии окажутся в численном превосходстве. Построить матрицу игры.

Ответ.

1	-1	-1
1	1	-1
-1	1	1
-1	-1	1

9. Оба игрока называют одну из четырех букв: А, Б, В, Г. Игрок, назвавший букву, стоящую раньше в ряду, получает единицу выигрыша. Если оба игрока называют одинаковые буквы, игра заканчивается вничью. Построить матрицу игры.

Ответ.

0	-1	-1	-1
1	0	-1	-1
1	1	0	-1
1	1	1	0

10. Пусть задана подстановка

1	2	...	n
a_1	a_2	...	a_n

Второй игрок выбирает один из элементов нижней строки, а первый угадывает его индекс. Если он угадал, то получает сумму, численно равную значению выданного элемента, в противном случае не получает ничего. Построить матрицу игры.

Ответ.

a_1	0	...	0
0	a_2	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	...	a_n

11. В задаче об атаке и защите каждый игрок имеет две стратегии, а вероятность успеха атаки дается матрицей $((a_{ij}))_{2,2}$, где $a_{11} > a_{21}$, $a_{21} < a_{22}$. Пусть дополнительно к этому атакующий может использовать часть своих сил для разведки. Если это сделано, то вероятность его успеха уменьшится на фиксированную величину r , но стратегия обороняющегося обнаруживается, если тот не выделяет часть своих сил для контрразведки. Это отвлечение его сил увеличивает вероятность успешной атаки на величину s . Построить матрицу выигрышей для этой игры.

Указание: В дополнение к первоначальным стратегиям, обозначенным через 1, 2, обороняющийся имеет две новые стратегии 10 и 20. Стратегия 10, например, состоит в использовании против противника стратегии 1 и использовании контрразведки. атакующий в добавление к своим стратегиям 1 и 2 имеет также стратегии, в которых он проводит разведку и использует полученную информацию (1P, 2P). Например 1P означает стратегию 1, если ему известно, что противник использует стратегию 2.

2. Седловые точки

Седловая точка отыскивается по следующему правилу: Находятся минимальные элементы в каждой строке и среди них отыскивается максимальный. Затем находят максимальные элементы в каждом столбце и среди них находится минимальный. Если выбранные элементы совпадают, то матрица обладает седловой точкой, в противном случае ее нет.

Схема отыскания седловой точки:

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow \min_j a_{1j} \\ \rightarrow \min_j a_{2j} \\ \rightarrow \dots \\ \rightarrow \min_j a_{mj} \end{array} \\
 \end{array} \right\} \rightarrow \max_i \min_j a_{ij}
 \end{array}$$

$$\underbrace{\max_i a_{i1} \quad \dots \quad \max_i a_{in}}_{\min_j \max_i a_{ij}}$$

Пример. Найти седловую точку матрицы

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow -2 \\ \rightarrow -2 \end{array} & \rightarrow -2 \\
 \downarrow \quad \downarrow & & \\
 2 & 2 & \\
 \downarrow & & \\
 2 & &
 \end{array}$$

Седловой точки нет.

Задачи.

Найти седловые точки матриц:

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 4. \begin{vmatrix} 12 & 13 & 12 \\ 10 & 31 & 9 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 12 & 13 & 12 \\ 10 & 31 & 13 \end{vmatrix} \quad 6. \begin{vmatrix} 21 & 11 & 31 \\ 32 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad 8. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad 10. \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

3. Смешанные стратегии. Оптимальные стратегии и цена игры

Пример. Определить выигрыш первого игрока в игре с матрицей:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

если первый игрок выбрал стратегию $X=(1/2, 1/2, 0)$, а второй игрок стратегию $(0, 1/3, 2/3)$.

Решение.

$$\begin{aligned} XAY^T &= (1/2, 1/2, 0) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \\ &= (1/2, 1/2, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Пример. Проверить, являются ли стратегии $X^*=(1/3, 1/3, 1/3)$, $Y^*=(1/3, 1/3, 1/3)$ оптимальными в игре с матрицей

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение. Воспользуемся теоремой 3. Проверим левую часть двойного неравенства

$$X^* A Y^{*T} = (1/3, 1/3, 1/3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 7/3,$$

$$A_1 Y^{*T} = (3, 2, 2) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 7/3,$$

$$A_2 Y^{*T} = (2, 3, 2) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 7/3,$$

$$A_3 Y^{*T} = (2, 2, 3) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 7/3.$$

Т.о., выполняется левая часть двойного неравенства. Проверим выполнение правой части этого неравенства:

$$X^* A_1 = (1/3, 1/3, 1/3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 7/3,$$

$$X^* A_2 = (1/3, 1/3, 1/3) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 7/3,$$

$$X^* A_3 = (1/3, 1/3, 1/3) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 7/3.$$

Т.о., выполняется и правая часть неравенства, следовательно, стратегии X^* , Y^* являются оптимальными в игре с матрицей A .

Задачи. Определить выигрыш первого игрока в игре с матрицей $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$, если первый игрок выбрал стратегию $X = (x_1, \dots, x_m)$, а второй игрок – стратегию $Y = (y_1, \dots, y_n)$.

1.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$X = (1/2; 1/2);$$

$$Y = (1/4; 3/4).$$

2.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$X = (1/3; 1/4; 1/2);$$

$$Y = (1/2; 1/3; 1/6).$$

3.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$X = (1/3; 1/3; 1/3);$$

$$Y = (1/12; 5/6; 1/12).$$

4.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$X = (1/4; 1/4; 1/4; 1/4);$$

$$Y = (1/8; 3/8; 1/8; 3/8).$$

5.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$X = (1/4; 3/8; 3/8; 0);$$

$$Y = (0; 1/4; 1/2; 1/4).$$

6.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$X = (0; 1/2; 0; 1/2);$$

$$Y = (1/8; 0; 5/8; 1/4).$$

7.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$X = (1/8; 3/8; 1/8; 3/8);$$

$$Y = (0; 1/2; 1/2; 0).$$

8.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$X = (1/8; 1/8; 1/8; 5/8);$$

$$Y = (0; 1/2; 1/4; 1/4).$$